



taup1.fr

Exercice N°1 (R. Maire)

1 ▷ Soit :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (u_{n+1} - \pi u_n)_{n \in \mathbf{N}} \end{cases}$$

Alors $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ et (E) revient à $\varphi((u_n)_{n \in \mathbf{N}}) = ((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$. (E) est ainsi un problème linéaire donc l'ensemble des solutions est formé de la somme de $\ker \varphi$ et d'une solution particulière. On a :

$$\varphi((u_n)_{n \in \mathbf{N}}) = 0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}} \iff u_n = u_0 \pi^n.$$

Donc $\ker \varphi = \text{Vect}((\pi^n)_{n \in \mathbf{N}})$. Ensuite, en s'inspirant de la méthode de variation de la constante, recherchons des solutions sous la forme $(\lambda_n \pi^n)_{n \in \mathbf{N}}$. On a :

$$\lambda_{n+1} \pi^{n+1} - \lambda_n \pi^{n+1} = (-1)^n \iff \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{(-1)^n}{\pi^{n+1}}.$$

Prenons $N \geq 0$, et sommions de 0 à N :

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} \pi^{n+1} - \lambda_n \pi^{n+1} = (-1)^n &\iff \sum_{n=0}^N \lambda_{n+1} - \lambda_n = - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}} \\ &\iff \lambda_{N+1} = \lambda_0 + \frac{1 - \left(\frac{-1}{\pi}\right)^{N+1}}{\pi - 1} \\ &\iff \lambda_N \pi^N = \lambda_0 \pi^N + \frac{1 - \left(\frac{-1}{\pi}\right)^N}{\pi - 1} \pi^N. \end{aligned}$$

Le terme en $\lambda_0 \pi^N$ représente la solution de l'équation homogène. Pour la solution particulière, on peut prendre $\lambda_0 = 0$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est la droite affine de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$:

$$\mathcal{D} = \text{Vect}((\pi^n)_{n \in \mathbf{N}}) + \left(\frac{1 - \left(\frac{-1}{\pi}\right)^n}{\pi - 1} \pi^n \right)_{n \in \mathbf{N}}.$$