



taup1.fr

Planche N°81 - Mines et Ponts MP

1 ▷ Inégalité de Hardy. Soit f continue de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R} et de carré intégrable. On pose pour $x > 0$:

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ et } F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que g^2 est intégrable sur \mathbf{R}_+^* et qu'on a l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(t) dt.$$

Montrer que fg est intégrable sur \mathbf{R}_+^* et que :

$$\int_0^{+\infty} f^2(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt.$$

2 ▷ Soit $(a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}^n)$, calculer :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}.$$

3 ▷ f est continue et intégrable de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R}_+ , tend-elle vers 0 en $+\infty$?

4 ▷ Cours : comment obtenir une primitive de $\frac{1}{\cosh}$?
arccos admet-elle un développement limité en 1 ?