taup1.fr

Planche N°81 - Mines et Ponts MP (R. Maire)

1 ▷ On vérifie que g^2 est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ par théorèmes généraux.
Prenons $X > 0$ et $Y > X$. En intégrant par parties :

$$\int_X^Y g^2(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{F^2(t)}{t}\right]_X^Y + \int_X^Y 2\frac{F(t)f(t)}{t}dt. \tag{1}$$

D'une part, pour $x \to 0^+$,

$$F(x) = F(0) + f(0)x + o(x) = f(0)x + o(x).$$

Ce qui donne :

$$\frac{F^2(X)}{X} \underset{X\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, nous allons montrer que $F^2(x) = o_{+\infty}(x)$.
Comme f est de carré intégrable sur $\mathbf{R}_+$:

$$\int_x^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\int_{A_\varepsilon}^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon^2.$$

Ainsi, par inégalité de Cauchy-Shwarz pour $x \geq A_\varepsilon$:

$$\left|\int_{A_\varepsilon}^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{x - A_\varepsilon}\sqrt{\int_{A_\varepsilon}^x f^2(t)\mathrm{d}t} \leq \sqrt{x - A_\varepsilon}\sqrt{\int_{A_\varepsilon}^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t} \leq \left(\sqrt{x - A_\varepsilon}\right)\varepsilon.$$

Or, pour $x \geq A_\varepsilon$, par relation de Chasles et par inégalité triangulaire :

$$|F(x)| \leq \left| \int_0^{A_\varepsilon} f(t)\mathrm{d}t \right| + \left| \int_{A_\varepsilon}^{x} f(t)\mathrm{d}t \right|.$$

Donc pour $x \geq A_\varepsilon$:

$$\frac{|F(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_0^{A_\varepsilon} f(t)\mathrm{d}t \right| + \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x - A_\varepsilon} \right) \varepsilon.$$

Ensuite, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_0^{A_\varepsilon} f(t)\mathrm{d}t \right| \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc il existe $B_\varepsilon \geq A_\varepsilon$ tel que pour $x \geq B_\varepsilon$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_0^{A_\varepsilon} f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \varepsilon.$$

Enfin pour $x > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x - A_\varepsilon} \right) \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour $x \geq B_\varepsilon$:

$$\frac{|F(x)|}{\sqrt{x}} \leq 2\varepsilon.$$

Donc $F^2(x) = o_{+\infty}(x)$. Et donc :

$$\frac{F^2(Y)}{Y} \underset{Y \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par inégalité de Cauchy-Shwarz :

$$\int_X^Y 2\frac{F(t)f(t)}{t} dt \leq \sqrt{\int_X^Y g^2(t)\mathrm{d}t} \sqrt{4 \int_X^Y f^2(t)\mathrm{d}t}.$$

Ainsi, par passage aux limites dans (1) :

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)\mathrm{d}t} \sqrt{4 \int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t}.$$

Par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}_+$:

$$\left(\int_0^{+\infty} g^2(t)\mathrm{d}t \right)^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} g^2(t)\mathrm{d}t \int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t.$$

Si f est la fonction nulle, alors g prolongée en 0 l'est aussi et on a l'inégalité de Hardy. Sinon, $\int_0^{+\infty} g^2(t)\mathrm{d}t > 0$. On peut alors simplifier et on établit là aussi l'inégalité de Hardy :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g^2(t)\mathrm{d}t \leq 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t.}$$

Or on a :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t < +\infty.$$

On déduit du résultat précédent que :

$$\boxed{g \text{ est de carré intégrable sur } \mathbf{R}_+^*.}$$

On a $(f-g)^2 \geq 0$. Donc $f^2 - 2fg + g^2 \geq 0$ et donc $|fg| \leq \frac{f^2+g^2}{2}$. Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur $\mathbf{R}_+^*$, par théorème de comparaison pour les fonctions positives :

$$\boxed{fg \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}_+^*.}$$

Enfin, en passant aux limites dans (1), on établit que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t.}$$

2 ▷ Soit $n \geq 2$. Si les a_i ne sont pas 2 à 2 distincts pour $0 \leq i \leq n$, on a :

$$\boxed{D_n = 0.}$$

En effet, au moins 2 lignes de D_n sont alors identiques et on conclut par le fait que le déterminant est une forme linéaire n-alternée. Étudions donc le cas où les a_i sont 2 à 2 distincts.
On pose pour $x \in \mathbf{K}$:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^n \end{vmatrix}.$$

$D_n(X)$ est un polynôme de degré n qui admet a_i $(1 \leq i \leq n-1)$ pour racine. Ainsi, il existe $(a,b) \in \mathbf{K}^* \times \mathbf{K}$ tel que :

$$D_n(a_n) = D_n = (aa_n + b)\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i).$$

En développant par rapport à la dernière ligne et en notant V_n le déterminant de Vandermonde d'ordre n, on trouve :

$$\begin{cases} a = V_{n-1} \\ b = D_{n-1} \end{cases}$$

On obtient une relation de récurrence :

$$D_n = (V_{n-1}a_n + D_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i).$$

On essaie de conjecturer une expression pour D_n avec D_2 :

$$D_2 = a_2^2 - a_1^2 = (a_1 + a_2)(a_1 - a_2) = (a_1 + a_2)V_2.$$

Montrons par récurrence que pour $n \geq 2$:

$$D_n = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) V_n.$$

L'initialisation au rang 2 vient d'être démontrée.
Soit $n \geq 2$. Suppons l'hypothèse de récurrence vraie pour n. On a :

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= (V_n a_{n+1} + D_n) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i) \\
&= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) a_{n+1} + \sum_{p=1}^{n} a_p \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \sum_{p=1}^{n+1} a_p \prod_{q=1}^{n} (a_{n+1} - a_q) \\
&= \sum_{p=1}^{n+1} a_p \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) \\
&= \left(\sum_{p=1}^{n+1} a_p \right) V_{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc l'hérédité est vérifiée. Par principe de récurrence, on établit pour $n \geq 2$:

$$\boxed{D_n = \sum_{p=1}^{n} a_p \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).}$$

Planche N°86 - Mines et Ponts MP (R. Maire)

1 ▷ On a $M_{ij} = X_i X_j$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Donc les colonnes de M sont toutes des multiples du vecteur $(X_1, ..., X_n)$. Donc $0 \leq \operatorname{rg} M \leq 1$. Ainsi, $\operatorname{rg} M$ suit une

loi de Bernoulli dont on va déterminer le paramètre.
Le rang de M est nul si et seulement si $M = 0_n$. Donc :

$$\operatorname{rg} M = 0 \Longleftrightarrow X_1 = ... = X_n = 0.$$

Ainsi :

$$(\operatorname{rg} M = 0) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i = 0).$$

Par indépendance :

$$\mathbf{P}(\operatorname{rg} M = 0) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^i = (1-p)^n.$$

Donc :

$$\boxed{\operatorname{rg} M \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p^n.}$$

On a :

$$\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Or, $X_i^2 = X_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Par indépendance :

$$\boxed{\operatorname{tr} M \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p.}$$

M est une matrice de projection si et seulement si $M^2 = M$.
Or pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$(M^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} X_i X_k^2 X_j = M_{ij} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Ainsi, pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{aligned} M^2 = M &\Longleftrightarrow (M^2)_{ij} = M_{ij} \\ &\Longleftrightarrow X_1 = ... = X_n = 0 \text{ ou } \sum_{k=1}^{n} X_k = 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (M^2 = M) &= \left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = 0) \right) \cup \left(\sum_{k=1}^{n} X_k = 1 \right). \\ &= (\operatorname{rg} M = 0) \cup (\operatorname{tr} M = 1). \end{aligned}$$

Ces 2 évenements sont incompatibles. Par σ-additivité, on déduit que la probabilité que M soit la matrice d'une projection est :

$$\boxed{\mathbf{P}(M^2 = M) = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}.}$$